$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3: Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$f(1, -2, 3) = (5, 2)$, $f(-3, 1, -2) = (-1, 3)$ et $f(2, -1, 1) = (3, 8)$

1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}^3$.

2) Ecrire la matrice représentant f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}$ est une base parce que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, parce

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z\right)\cdot\vec{b_1} + \left(-\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y - \frac{3}{4}z\right)\cdot\vec{b_2} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}y + \left(-\frac{5}{4}\right)z\right)\vec{b_3}$

$= \langle \vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3} \rangle \Rightarrow \mathcal{B}$ est base !

1) On doit démontrer que $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base, parce que une application linéaire est uniquement définie par les images d'une base.

$\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$

$\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} id(\vec{b_1}) & id(\vec{b_2}) & id(\vec{b_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$$

Matrice de changement de base

$id(\vec{b_1}) = \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_1} + (-2)\cdot\vec{e_2} + 3\,\vec{e_3}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{array}{c} id(\vec{e_1}) \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vec{b_3} \end{array}$$

$id(\vec{e_1}) = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{?}{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{?}{} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{?}{} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\right)^{-1} =$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 + 2\cdot L_1 \\ L_3 - 3\cdot L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{5}\cdot L_2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 + \boxed{3}\cdot L_2 \\ \\ L_3 - \boxed{7}\cdot L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$-5 - 7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = 1$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \boxed{-\frac{5}{4}}\cdot L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$-\frac{\cancel{5}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) = \frac{1}{4}$

$-\frac{\cancel{5}}{4}\cdot\frac{7}{\cancel{5}} =$

$\downarrow$

$-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} =$

$$\begin{array}{c} L_1 - \boxed{\frac{1}{5}}\cdot L_3 \\ L_2 + \frac{3}{5}\cdot L_3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$id\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{b_1}$ $\quad \vec{b_2}$ $\quad \vec{b_3}$

EXERCICE 3: Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$f(1, -2, 3) = (5, 2)$, $f(-3, 1, -2) = (-1, 3)$ et $f(2, -1, 1) = (3, 8)$

1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}^3$.

2) Ecrire la matrice représentant f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{M}(f) = \mathcal{M} \quad (f) \quad \mathcal{M}(id) =$

b_2 $\quad b_3$

EXERCICE 3: Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,-2,3)=(5,2),\ f(-3,1,-2)=(-1,3) \text{ et } f(2,-1,1)=(3,8)$$

1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}^3$.

2) Ecrire la matrice représentant f dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$$

$$f(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) =$$

$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\quad \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\vec{b}_1) & f(\vec{b}_2) & \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =} & \boxed{-\frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{21}{4}} & \boxed{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{15}{4}} \\ \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 2} & \boxed{-\frac{1}{2} + \dots} & \end{pmatrix}$$

miro